7.38 : Équation réduite de la quadrique :

(E) $\quad 2x^2+2y^2+z^2-2yz+2zx+4x-2y-z+3=0$

(E) est donnée dans le repère orthonormé $(0,e)=(0,e_1,e_2,e_3)$. La forme quadratique $\Phi(x,y,z)=2x^2+2y^2+z^2-2yz+2zx$ a pour matrice :

$$M=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$ diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres $e'=(e'_1,e'_2,e'_3)$.

Le polynôme caractéristique de M est $\chi_M(X)=X(2-X)(X-3)$. On trouve :

$$D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}=P^{-1}MP \quad \text{où } P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{2}{\sqrt6}&0&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$$ est la matrice de passage de e vers e'.

P est une matrice orthogonale, ie $P^{-1}={}^tP$, donc $D={}^tPMP$ sera la matrice de Φ dans e'. Ainsi, si l'on note $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ les coordonnées de $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ dans le repère $(0,e')$, notre quadrique s'écrira :

$$2y'^2+3z'^2+4\left(-\frac{1}{\sqrt6}x'+\frac{1}{\sqrt2}y'+\frac{1}{\sqrt3}z'\right)-2\left(\frac{1}{\sqrt6}x'+\frac{1}{\sqrt2}y'-\frac{1}{\sqrt3}z'\right)-\left(\frac{2}{\sqrt6}x'+\frac{1}{\sqrt3}z'\right)+3=0$$

$$2y'^2+3z'^2-\frac{8}{\sqrt6}x'+\frac{2}{\sqrt2}y'+\frac{5}{\sqrt3}z'+3=0$$

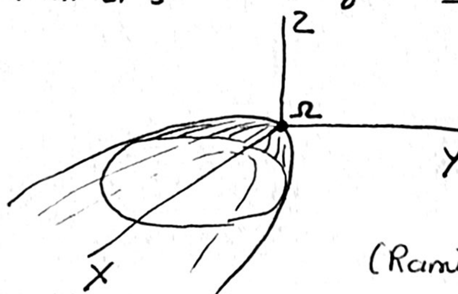
en poursuivant :

$$-\frac{8}{\sqrt6}x'+2\Big(\underbrace{y'+\frac{1}{2\sqrt2}}_{Y}\Big)^2+3\Big(\underbrace{z'+\frac{5}{6\sqrt3}}_{Z}\Big)^2+\frac{37}{18}=0$$

$$\Big(\underbrace{x'-\frac{37\sqrt6}{144}}_{X}\Big)-\frac{\left(y'+\frac{1}{2\sqrt2}\right)^2}{\frac{4}{\sqrt6}}-\frac{\left(z'+\frac{5}{6\sqrt3}\right)^2}{\frac{8}{3\sqrt6}}=0$$

Posons $\begin{cases}x'=X+\frac{37\sqrt6}{144}\\y'=Y-\frac{1}{2\sqrt2}\\z'=Z-\frac{5}{6\sqrt3}\end{cases}$ $\quad\begin{cases}a^2=\frac{4}{\sqrt6}\\b^2=\frac{8}{3\sqrt6}\end{cases}$

(E) aura pour équation $X-\frac{Y^2}{a^2}-\frac{Z^2}{b^2}=0$ dans le repère (Ω,e'_1,e'_2,e'_3) où Ω a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{37\sqrt6}{144}\\-\frac{1}{2\sqrt2}\\-\frac{5}{6\sqrt3}\end{pmatrix}$ dans $(0,e'_1,e'_2,e'_3)$. Il s'agit d'un paraboloïde elliptique (1 nappe) :



Formules de chgt de repère :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}+P\begin{pmatrix}\frac{37\sqrt6}{144}\\-1/2\sqrt2\\-5/6\sqrt3\end{pmatrix}$$

(Ramis II. 7.38 p271)